Instituto Politécnico

iversidad Nacional de Rosario Universidad Nacional de

Vectores

4º Año

Cód. 1404-19

Betina Cattaneo
Noemí Lagreca

Matemática

Dpto. de Matemática

Masterización: RECURSOS PEDAGOGICOS

VECTORES EN EL ESPACIO

Tanto en Física como en la vida cotidiana hay cantidades tales como el tiempo, la temperatura, la masa, la densidad, la cantidad de carga eléctrica, la cantidad de baldosas necesarias para cubrir el piso de un patio, entre otras que quedan completamente definidas por un número real y la unidad correspondiente. Este tipo de magnitudes se denominan **magnitudes escalares**.

> Se llaman **magnitudes escalares** aquellas que se caracterizan mediante un número real con una unidad apropiada de medida.

Sin embargo, otras cantidades tales como la velocidad con que se desplaza un móvil, que ya no quedan definidas tan solo por su módulo (que es lo que marca el velocímetro, en el caso de un automóvil), sino que se requiere, además, indicar la dirección (hacia donde se dirige), ya que su efecto depende además de su magnitud o módulo, de la dirección en la que actúa; también sucede cuando se quiere analizar el desplazamiento de un objeto, pues es necesario definir el punto inicial y final del movimiento. Es claro que no alcanza con especificar la magnitud aplicada mediante un número real, ya que resulta determinante la dirección y el sentido aplicados con el fin de lograr el objetivo. El modelo matemático para representar estas cantidades en las cuales importa la dirección y el sentido, además de la magnitud, es el concepto de vector y se denominan **magnitudes vectoriales**.

> Se llaman **magnitudes vectoriales** aquellas que se caracterizan por su magnitud, su dirección y su sentido.

El estudio de ***vectores en el plano*** lo haz desarrollado anteriormente en su forma geométrica. Ahora efectuaremos el estudio de los ***vectores en el espacio.***

En años anteriores has visto algunos conceptos y propiedades de vectores que utilizaremos en lo que sigue, entre ellos se encuentran los siguientes:

* **Condición de paralelismo entre vectores no nulos**

$$\text{Si } \vec{u} \neq \vec{o} \ \wedge \ \vec{u} \neq \vec{o} : \ \vec{u} \ // \ \vec{v} \Leftrightarrow \exists \alpha \in R - \{0\} \text{ tal que } \vec{u} = \alpha \vec{v}$$

* **Definición de producto escalar**

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{cases}0 & \text{si } \vec{a}=\vec{o}\ \vee\ \vec{b}=\vec{o}\\ \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\widehat{\overline{a}\overline{b}} & \text{si } \vec{a}\neq\vec{o}\ \wedge\ \vec{b}\neq\vec{o}\end{cases}$$

* **Algunas propiedades del producto escalar**

* $\left(\alpha.\vec{a}\right)\times\vec{b}=\alpha.\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)=\vec{a}\times\left(\alpha\,\vec{b}\right)$

* $\vec{a}\times\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^{2}\geq 0$

* **Condición de perpendicularidad entre vectores no nulos:**

$$\text{Si } \vec{a}\neq\vec{0}\wedge\vec{b}\neq\vec{0}:\ \vec{a}\ \mathrm{x}\ \vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$$

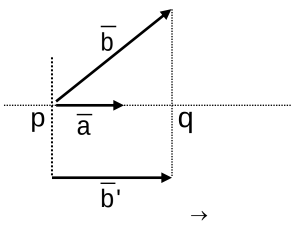
❖ VECTOR PROYECCIÓN

DEFINICIÓN:

Dados los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no nulos al ser aplicados ambos con origen en un mismo punto p es posible trazar por el extremo de uno de ellos, una perpendicular a la dirección del otro obteniéndose el punto q como indican las figuras.

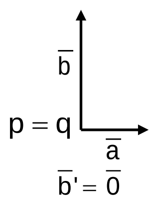
Caso a)

$0\leq\widehat{\overline{a}\overline{b}}<\frac{\pi}{2}$



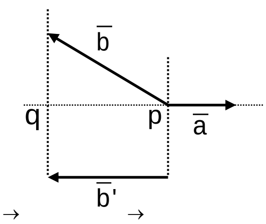
Caso b)

$\widehat{\overline{a}\overline{b}}=\frac{\pi}{2}$



Caso c)

$\frac{\pi}{2}<\widehat{\overline{a}\overline{b}}\leq\pi$



Al nuevo vector $\overrightarrow{pq}$ se lo denomina **vector proyección de** $\vec{b}$ **sobre** $\vec{a}$ y se indica:

$$\vec{b}'=\overrightarrow{pq}=\text{vector proy}_{\vec{a}}\,\vec{b}$$

Podemos observar que:

- para los casos *a* y *c*, resulta:

$$\vec{b}'//\vec{a}\Rightarrow\vec{b}'//\vec{a}_0\Rightarrow\exists\alpha\in R-\{0\}/\ \vec{b}'=\alpha\,\vec{a}_0 \qquad (1)$$

- para el caso *b*, resulta:

$$\vec{b}'=\vec{O} \qquad (2)$$

De (1) y (2) podemos concluir que:

$$\exists \alpha \in R \; / \; \vec{b'} = \alpha \, \vec{a_0}$$

A dicho número α se lo llama **proyección de** $\vec{b}$ **sobre** $\vec{a}$

Completa según los casos anteriores el signo de α

Caso *a*: ____________ Caso *b*: ____________ Caso *c*: ____________

TEOREMA 1

Dados los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no nulos, la proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$, es igual al producto del módulo de $\vec{b}$ por el coseno del ángulo determinado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

En símbolos:

$$\text{Si } \vec{a} \neq \vec{0} \text{ y } \vec{b} \neq \vec{0} \Rightarrow b' = \text{proy}_{\vec{a}} \vec{b} = \left|\vec{b}\right| \cos \widehat{\overline{a}\,\overline{b}}$$

PRÁCTICA

1) Calcula, en cada caso, la $\text{proy}_{\vec{a}} \vec{b}$ sabiendo que $\left|\vec{b}\right| = \sqrt{2}$ y

a) $\widehat{\overline{a}\,\overline{b}} = 135º$ b) $\widehat{\overline{a}\,\overline{b}} = 90º$ c) $\widehat{\overline{a}\,\overline{b}} = 45º$

2) Sabiendo que $\text{proy}_{\vec{a}} \vec{b} = -\sqrt{3}$ y $\widehat{\overline{a}\,\overline{b}} = 120º$ determina $\left|\vec{b}\right|$.

Nota:

Puede demostrarse que

$$\boxed{\vec{a} \neq \vec{0} \wedge \vec{b} \neq \vec{0} \Rightarrow \text{proy}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\left|\vec{a}\right|} = \vec{a_0} \times \vec{b}}$$

❖ PRODUCTO VECTORIAL ENTRE VECTORES

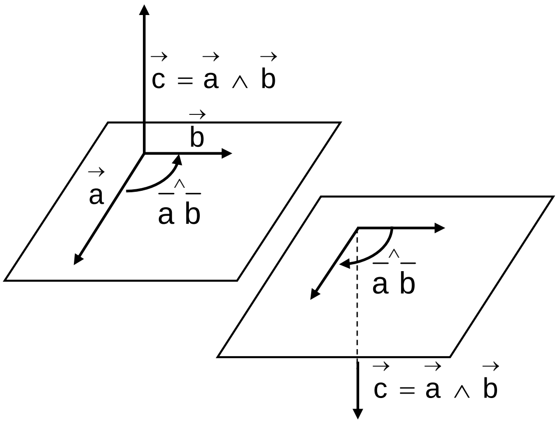
DEFINICIÓN:

Dados dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ de $\overline{V_3}$, se denomina **producto vectorial entre** $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y se lo simboliza $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{c}$, al vector $\vec{c}$ tal que:

$$\vec{c} = \begin{cases} \vec{o} & \text{si } \vec{a} = \vec{o} \vee \vec{b} = \vec{o} \\ \begin{cases} \left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right| = \left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \text{sen} \widehat{\overline{a}\,\overline{b}} \\ \text{dirección de } \vec{c} \text{ perpendicular al plano determinado por } \vec{a} \text{ y } \vec{b} \\ \text{sentido de } \vec{c} \text{ es el obtenido usando regla de la mano derecha (1)} \end{cases} & \text{si } \vec{a} \neq \vec{o} \wedge \vec{b} \neq \vec{o} \end{cases}$$

(1) ***Regla de la mano derecha***

El sentido de $\vec{a} \wedge \vec{b}$ está dado por la regla de la mano derecha. La misma consiste en: se coloca la mano derecha extendida con el pulgar separado de los cuatro dedos unidos, haciendo coincidir el primer vector del producto $(\vec{a})$ en dirección y sentido con esos cuatro dedos y luego dichos dedos giran hacia $\vec{b}$ a través del ángulo $\widehat{\bar{a}\,\bar{b}}$. El sentido de $\vec{a} \wedge \vec{b}$ está determinado por la dirección del dedo pulgar. Es decir, el vector apunta en el mismo sentido que el pulgar.



PROPIEDADES

$\forall\ \vec{a}$ y $\vec{b} \in \overline{V_3}$; $\alpha \in R$; $\beta \in R$, se cumplen las siguientes propiedades:

PV1) $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\left(\vec{b} \wedge \vec{a}\right)$

Demostración:

(1) Si $\vec{a} = \vec{o} \vee \vec{b} = \vec{o}$, resulta

$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{O}$ y $-\left(\vec{b} \wedge \vec{a}\right) = -\vec{O} = \vec{O}$, por definición de producto vectorial, por lo tanto

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -\left(\vec{b} \wedge \vec{a}\right) = \vec{O}$$

(2) Si $\vec{a} \neq \vec{o}\ ; \vec{b} \neq \vec{o}$

i) $\vec{a}$ paralelo a $\vec{b}$, resulta:

$$\vec{a} \,//\, \vec{b} \Rightarrow \widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 0^{o} \vee \widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 180^{o} \Rightarrow \operatorname{sen} \widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = \operatorname{sen} \widehat{\vec{b}\,\vec{a}} = 0 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \operatorname{sen} \widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 0 \\ \left|-\left(\vec{b} \wedge \vec{a}\right)\right| = \left|-1\right|\left|\vec{b}\right|\left|\vec{a}\right| \operatorname{sen} \widehat{\vec{b}\,\vec{a}} \overset{(1)}{=} \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \operatorname{sen} \widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right| = \left|-\left(\vec{b} \wedge \vec{a}\right)\right| = 0$$

Por lo tanto $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\left(\vec{b} \wedge \vec{a}\right) = \vec{O}$

ii) $\vec{a}$ no paralelo a $\vec{b}$, resulta:

Módulo:

$$\left.\begin{array}{r} \left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \operatorname{sen} \widehat{\vec{a}\,\vec{b}} \\ \left|-\left(\vec{b} \wedge \vec{a}\right)\right| = \left|-1\right|\left|\vec{b}\right|\left|\vec{a}\right| \operatorname{sen} \widehat{\vec{b}\,\vec{a}} \overset{(1)}{=} \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \operatorname{sen} \widehat{\vec{a}\,\vec{b}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right| = \left|-\left(\vec{b} \wedge \vec{a}\right)\right|$$

Dirección:

$\vec{a} \wedge \vec{b}$ y $\vec{b} \wedge \vec{a}$ tienen la misma dirección por ser ambos perpendiculares al plano determinado por $\bar{b}$ y $\bar{a}$

Sentido:

$\vec{a} \wedge \vec{b}$ tiene sentido opuesto a $\vec{b} \wedge \vec{a}$ por regla de la mano derecha, entonces $\vec{a} \wedge \vec{b}$ tiene igual sentido que $-\left(\vec{b} \wedge \vec{a}\right)$

De lo expuesto resulta que $\vec{a} \wedge \vec{b}$ y $-\left(\vec{b} \wedge \vec{a}\right)$ tienen igual módulo, dirección y sentido, por lo tanto: $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\left(\vec{b} \wedge \vec{a}\right)$

De (1) y (2) podemos concluir que $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\left(\vec{b} \wedge \vec{a}\right)$

PV2) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{c} + \vec{b} \wedge \vec{c}$

PV3) $\left(\alpha.\vec{a}\right) \wedge \vec{b} = \alpha.\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)$

PV4) Si $\vec{a} \neq \vec{o} \wedge \vec{b} \neq \vec{o}$: $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \,//\, \vec{b}$ (propiedad de vectores paralelos no nulos)

Demostración:

$\Rightarrow$)

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right| = 0 \Rightarrow \underbrace{\left|\vec{a}\right|}_{\neq 0}\underbrace{\left|\vec{b}\right|}_{\neq 0} \operatorname{sen} \widehat{\bar{a}\,\bar{b}} \Rightarrow \operatorname{sen} \widehat{\bar{a}\,\bar{b}} = 0 \Rightarrow \widehat{\bar{a}\,\bar{b}} = 0 \;\text{ o }\; \widehat{\bar{a}\,\bar{b}} = \pi \Rightarrow \vec{a} \,//\, \vec{b}$$

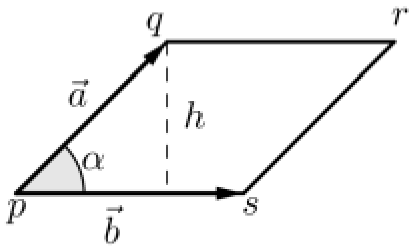
$\Leftarrow)$

$$\vec{a} \,//\, \vec{b} \Rightarrow \widehat{\vec{a}\vec{b}} = 0^o \vee \widehat{\vec{a}\vec{b}} = 180^o \Rightarrow \operatorname{sen}\widehat{\vec{a}\vec{b}} = 0 \Rightarrow \left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \operatorname{sen}\widehat{\vec{a}\vec{b}} = 0 \Rightarrow \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{O}$$

TEOREMA 2

Dados los vectores $\vec{a} \neq \vec{o}$; $\vec{b} \neq \vec{o}$ y $\vec{a}$ no paralelo a $\vec{b}$, entonces $\left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right|$ es el área del paralelogramo pqrs, siendo $\vec{pq} = \vec{a}$ y $\vec{ps} = \vec{b}$

Demostración:



$$\text{área pqrs} = \left|\vec{b}\right| . h \overset{(1)}{=} \left|\vec{b}\right|\left|\vec{a}\right| \operatorname{sen}\alpha \overset{(2)}{=} \left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right|$$

(1) $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{h}{\left|\vec{a}\right|} \Rightarrow h = \left|\vec{a}\right| . \operatorname{sen}\alpha$ (2) definición de producto vectorial

PRÁCTICA

3) Si $\vec{a} = 2\vec{v}$, determina:

a) $\vec{a} \wedge \vec{v}$

b) $\vec{v} \wedge \vec{v}$

c) $\vec{a} \wedge \vec{a}$

d) $\dfrac{1}{2}\vec{a} \wedge \vec{v}$

4) Sabiendo que $\left|\vec{a}\right| = 5$, $\left|\vec{b}\right| = \sqrt{3}$ y $\widehat{\bar{a}\bar{b}} = \dfrac{\pi}{3}$, calcula:

a) $\left|\vec{b} \wedge \vec{a}_0\right|$

b) $\left|\left(4\vec{b}\right) \wedge \left(-3\vec{a}\right)\right|$

c) $\left|\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \wedge \left(\vec{a} - \vec{b}\right)\right|$

d) $\left|\left(2\vec{a} + \vec{b}\right) \wedge \left(3\vec{a} - \vec{b}\right)\right|$

5) Sabiendo que $\left|\bar{a}\right| = 4$, $\left|\bar{b}\right| = 2$ y $\left|\bar{a} \wedge \bar{b}\right| = 4\sqrt{3}$, calcula $\vec{a} \,x\, \vec{b}$. ¿Es única la solución? Justifica

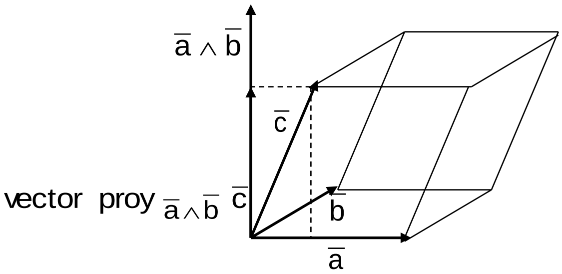
❖ PRODUCTO MIXTO ENTRE VECTORES

DEFINICIÓN:

Dados dos vectores $\vec{a}$; $\vec{b}$ y $\vec{c}$ de $\overline{V_3}$, se denomina el **producto mixto entre** $\vec{a}$; $\vec{b}$ y $\vec{c}$ al número que se obtiene haciendo $\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \times \vec{c}$.

TEOREMA 3

Si $\vec{a} \neq \vec{o}$; $\vec{b} \neq \vec{o}$; $\vec{c} \neq \vec{o}$; $\vec{a}$ no paralelo a $\vec{b}$ y $\vec{a}$; $\vec{b}$ y $\vec{c}$ no coplanares entonces $\left|\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \times \vec{c}\right|$ volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{a}$; $\vec{b}$ y $\vec{c}$.



No se efectuará la demostración en el presente curso

TEOREMA 4

Si $\vec{a} \neq \vec{o} \;\wedge\; \vec{b} \neq \vec{o} \;\wedge\; \vec{c} \neq \vec{o} \wedge \vec{a}$ no paralelo $\vec{b}$; $\vec{a}$; $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son coplanares $\Leftrightarrow \left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \times \vec{c} = 0$

No se realizará la demostración en el presente curso

PRÁCTICA

6) Calcula $\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \times \vec{c}$ sabiendo $\vec{c} \perp \vec{a}$; $\vec{c} \perp \vec{b}$; $\widehat{\bar{a},\bar{b}} = \dfrac{\pi}{6}$; $\left|\vec{a}\right| = 6$; $\left|\vec{b}\right| = 3$ y $\left|\vec{c}\right| = 3$.

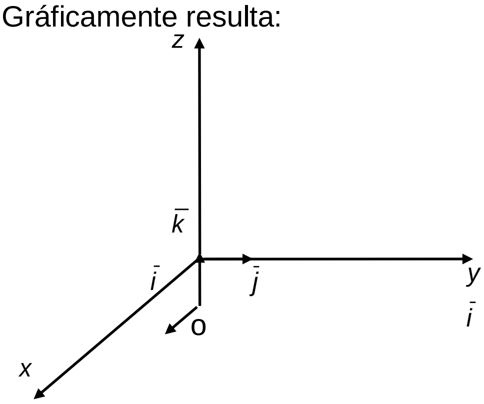
SISTEMA DE REFERENCIA CARTESIANO ORTONORMAL

Dado un punto cualquiera del espacio o (origen de coordenadas), y en él aplicados tres versores $\bar{i}$; $\bar{j}$ y $\bar{k}$ perpendiculares dos a dos, al conjunto $\{o;\ \bar{i};\ \bar{j};\ \bar{k}\}$ se lo denomina **sistema de referencia ortonormal en el espacio**.

Denominaremos como:

- **ejes coordenados "x"; "y" y "z"** a cada una de las rectas que contienen a cada uno de los versores $\bar{i}$; $\bar{j}$ y $\bar{k}$, respectivamente.
- **planos coordenados xy; xz e yz**, a los planos que contienen a los ejes x e y, a los eje x y z y a los eje y y z , respectivamente.

Gráficamente resulta:



$$\left.\begin{array}{l} \text{punto fijo } o \\ |\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1 \\ \bar{i} \perp \bar{j} \\ \bar{j} \perp \bar{k} \\ \bar{k} \perp \bar{i} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \{o; \bar{i}; \bar{j}; \bar{k}\} \text{ sistema de referencia} \\ \text{ortonormal en el espacio} \end{array}$$

DESCOMPOSICIÓN DE UN VECTOR

DEFINICIÓN:

Llamaremos **vector posición** a todo vector con origen en el origen de coordenadas.

Dado un sistema de referencia $\{o;\bar{i};\bar{j};\bar{k}\}$ y un punto $p(p_1;p_2;p_3)$, si por p trazamos una recta paralela a $\bar{k}$, ésta corta al plano xy en un punto que llamaremos p'. Como $\overline{op'}$, $\bar{i}$ y $\bar{j}$ están en un mismo plano, resulta: $\vec{op'} = p_1\bar{i} + p_2\bar{j}$ (1).

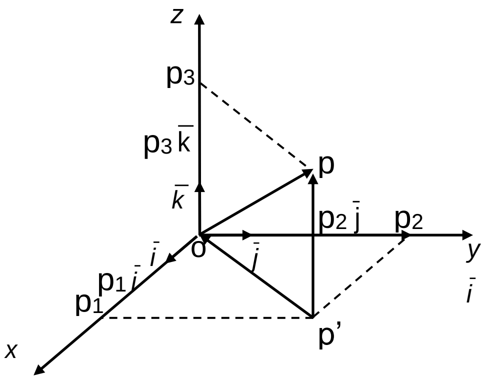
Por otra parte,

$$\left.\begin{array}{l} \vec{op} = \vec{op'} + \vec{p'p} \\ \vec{p'p} \,//\, \bar{k} \Rightarrow \vec{p'p} = p_3\bar{k} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{op} = \vec{op'} + p_3\bar{k} \qquad (2)$$

De (1) y (2), podemos concluir que:

$$\vec{op} = p_1\bar{i} + p_2\bar{j} + p_3\bar{k}$$

Gráficamente resulta:



DEFINICIONES:

Llamamos:

- a la expresión $\vec{op} = p_1\bar{i} + p_2\bar{j} + p_3\bar{k}$ **expresión canónica o cartesiana del vector** $\vec{op}$.
- a la terna ordenada de números $(p_1;p_2;p_3)$ **componentes escalares del vector** $\vec{op}$ en el sistema $\{o;\bar{i};\bar{j};\bar{k}\}$.
- a los vectores $p_1\bar{i}$; $p_2\bar{j}$ y $p_3\bar{k}$ se los llama **componentes vectoriales de** $\vec{op}$.

Nota: Se puede demostrar que demuestra que $\left|\vec{op}\right| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$ es el módulo del vector posición $\vec{op} = (p_1\,;p_2\,;p_3)$

PRÁCTICA

7) En un sistema de referencia $\{o;\bar{i};\bar{j};\bar{k}\}$;
   a) ubica los puntos: $a(2\,;1;\,3)$; $b(0\,;2\,;1)$; $c(-1;\,0\,;0)$ y $d(4\,;0\,;3)$.
   b) Determina los módulos de los vectores posición $\vec{oa}$ y $\vec{od}$
8) Determina las coordenadas de los puntos simétricos de $a(0\,;-2\,;4)$; $b\,(3\,;-1;\sqrt{2})$ y $c(0\,;1;-2)$
   a) respecto al plano coordenado xy.
   b) respecto al eje x.
   c) respecto al origen de coordenadas.

VECTORES IGUALES

Los vectores $\vec{u} = (u_1 ; u_2 ; u_3)$ y $\vec{v} = (v_1 ; v_2 ; v_3)$ son iguales si y solo si sus componentes son iguales.

En símbolos:

$$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \\ u_3 = v_3 \end{cases}$$

OPERACIONES ENTRE VECTORES EN FUNCIÓN DE SUS COMPONENTES

- **SUMA**

Dados los vectores $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ y $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, el vector suma se obtiene:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1; a_2; a_3) + (b_1; b_2; b_3) = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$$

- **DIFERENCIA**

Dados los vectores $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ y $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, el vector diferencia se obtiene:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right) = (a_1; a_2; a_3) + (-b_1; -b_2; -b_3) = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$$

- **PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UN VECTOR**

Dados el vector $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ y el número α, el vector producto de $\vec{a}$ por α se obtiene:

$$\alpha \vec{a} = \alpha(a_1; a_2; a_3) = (\alpha a_1; \alpha a_2; \alpha a_3)$$

Observación: las propiedades que satisfacen la suma y el producto de un escalar por un vector son las mismas que en lo desarrollado geométricamente.

TEOREMA 5

Si $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3) \neq \vec{o}$; $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3) \neq \vec{o}$:

$$\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \quad (b_1 \neq 0; b_2 \neq 0; b_3 \neq 0)$$

No se realizará la demostración en el presente curso

PRÁCTICA

9) Siendo $\vec{a} = 1\bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}$; $\vec{b} = (4 ; -3 ; -1)$ y $\vec{c} = (-5 ; -3 ; 5)$, determina:

a. $\vec{a} + 5\,\vec{b}$

b. $\vec{c} + 3\,\vec{b} - \vec{a}$

c. $\left|3\vec{c}\right|$

d. $(-3)\vec{c}+2\vec{a}$

e. $\vec{a}_0$ (recordar: $\vec{u}_0=\dfrac{\vec{u}}{\left|\vec{u}\right|}$ es versor asociado a $\vec{u}$)

f. Justifica si los vectores $\vec{a}+\vec{b}$ y $\vec{a}-2\vec{c}$ son paralelos

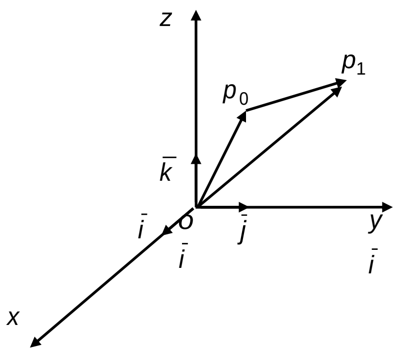
COMPONENTES ESCALARES DE UN VECTOR NO POSICIÓN

TEOREMA 6

Dados los puntos $p_0(x_0;y_0;z_0)$ y $p_1(x_1;y_1;z_1)$ entonces las componentes escalares de $\overrightarrow{p_0p_1}$ son $\left(x_1-x_0\,;\ y_1-y_0\,;\ z_1-z_0\right)$.

Demostración

Recordando la definición y propiedades de la suma entre vectores y la expresión canónica de un vector posición, resulta:



$$\overrightarrow{op_0}+\overrightarrow{p_0p_1}=\overrightarrow{op_1}\Leftrightarrow\overrightarrow{p_0p_1}=\overrightarrow{op_1}-\overrightarrow{op_0}$$

$$\overrightarrow{p_0p_1}=(x_1\bar{i}+y_1\bar{j}+z_1\bar{k})-(x_0\bar{i}+y_0\bar{j}+z_0\bar{k})$$

$$\overrightarrow{p_0p_1}=(x_1-x_0)\bar{i}+(y_1-y_0)\bar{j}+(z_1-z_0)\bar{k}$$

de donde las componentes escalares de $\overrightarrow{p_0p_1}$ son:

$$\left(x_1-x_0\,;\ y_1-y_0\,;\ z_1-z_0\right)$$

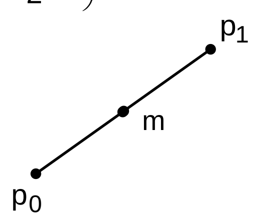
COORDENADAS DEL PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO DETERMINADO POR DOS PUNTOS

TEOREMA 7

Dados los puntos $p_0(x_0;y_0;z_0)$; $p_1(x_1;y_1;z_1)$ y el punto m, punto medio m del segmento $\overline{p_0p_1}$, entonces las coordenadas de m son $\left(\dfrac{x_1+x_0}{2};\dfrac{y_1+y_0}{2};\dfrac{z_1+z_0}{2}\right)$

Demostración

Como m es el punto medio de $\overline{p_0p_1}$, resulta:



$$\overrightarrow{p_0m}=\overrightarrow{mp_1}$$

Llamando $(x_m;y_m;z_m)$ a las coordenadas de m y utilizando el teorema 1, podemos escribir:

$$(x_m - x_0\ ;\ y_m - y_0\ ;\ z_m - z_0) = (x_1 - x_m\ ;\ y_1 - y_m\ ;\ z_1 - z_m)$$

Luego, dos vectores son iguales si sus componentes son iguales, es decir:

$$\begin{cases} x_m - x_0 = x_1 - x_m \Rightarrow 2x_m = x_1 + x_0 \Rightarrow x_m = \dfrac{x_1 + x_0}{2} \\ y_m - y_0 = y_1 - y_m \Rightarrow 2y_m = y_1 + y_0 \Rightarrow y_m = \dfrac{y_1 + y_0}{2} \\ z_m - z_0 = z_1 - z_m \Rightarrow 2z_m = z_1 + z_0 \Rightarrow z_m = \dfrac{z_1 + z_0}{2} \end{cases}$$

Reemplazando en $m\,(x_m\,;y_m\,;z_m)$ resulta $m\left(\dfrac{x_1 + x_0}{2};\dfrac{y_1 + y_0}{2};\dfrac{z_1 + z_0}{2}\right)$

Ejemplo

Dados los puntos $p_0(1;-2;3)$ y $p_1(0;5;-1)$, entonces:

a) Las componentes escalares de $\overrightarrow{p_0p_1}$ son $\overrightarrow{p_0p_1} = (-1;7;-4)$.

b) La expresión canónica de $\overrightarrow{p_1p_0}$ es $\overrightarrow{p_1p_0} = 1\,\bar{i} - 7\,\bar{j} + 4\,\bar{k}$.

c) La distancia entre los puntos p_0 y p_1 o el módulo de $\left|\overrightarrow{p_0p_1}\right|$ es $d(p_0;p_1) = \left|\overrightarrow{p_0p_1}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 7^2 + (-4)^2} = \sqrt{66}$.

d) Las coordenadas del punto medio del segmento $\overline{p_0p_1}$ son $m\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2};1\right)$.

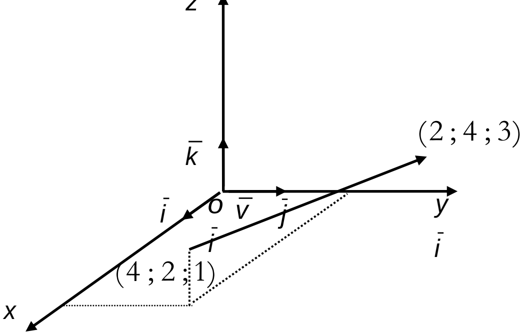
PRÁCTICA

10) Dados los puntos $a(4;2;-1)$ y $b(-3;2;1)$ en un $\{o;\bar{i};\bar{j};\bar{k}\}$ determina:

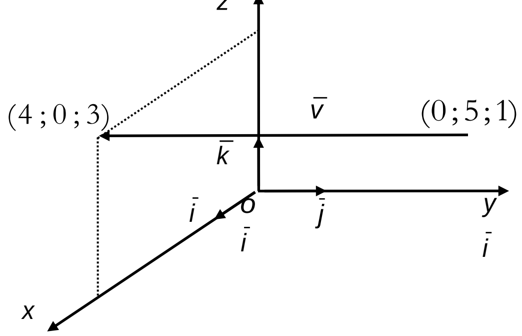
   a. las componentes escalares de $\bar{u}/\bar{u} = \overrightarrow{ab}$.
   b. las coordenadas de m, siendo m el punto medio del segmento $\overline{ab}$.

11) Determina las componentes del vector $\bar{v}$ en cada caso.

i.



ii.



12) Siendo $a(-1;5;-3)$ y $b(2;-1;0)$ y $\vec{v} = 3\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$, determina:

a) Las componentes vectoriales de $\vec{u} = 3\vec{v} - \vec{ab}$.
b) Las coordenadas del punto medio del segmento $\overline{ab}$.
c) Un vector colineal con $\vec{v}$ de módulo 3.

13) Un vector tiene módulo 13 y sus dos primeras componentes son 3 y 4, en ese orden; ¿Cuál es la tercera componente? ¿existe única solución?

14) Un vector de módulo 5 tiene las tres componentes iguales ¿cuáles son?

COSENOS DIRECTORES DE UN VECTOR

DEFINICIONES:

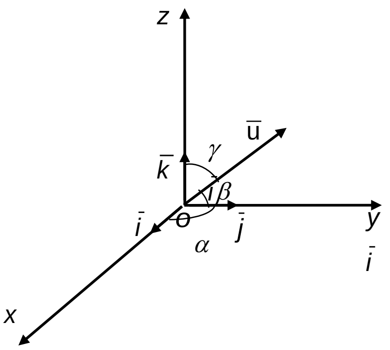
Llamaremos:

- ***ángulos directores de un vector***, respecto de un sistema $\{o;\bar{i};\bar{j};\bar{k}\}$, a los ángulos que el vector forma con cada uno de los versores del sistema.
- ***cosenos directores de un vector***, respecto de un sistema $\{o;\bar{i};\bar{j};\bar{k}\}$, a cada uno de los cosenos de los ángulos directores.

Ejemplo:

Dados el vector $\vec{u}$, tenemos:

- ángulos directores de $\vec{u}$: $\widehat{\bar{u}\bar{i}} = \alpha$; $\widehat{\bar{u}\bar{j}} = \beta$ y $\widehat{\bar{u}\bar{k}} = \gamma$
- cosenos directores de $\vec{u}$: $\cos\alpha$; $\cos\beta$ y $\cos\gamma$



MÁS OPERACIONES ENTRE VECTORES EN FUNCIÓN DE SUS COMPONENTES

Hasta el momento solo podíamos calcular el producto escalar y vectorial aplicando su definición. Demostraremos a continuación formulas que nos permitirán obtener dichos productos utilizando las componentes de los vectores involucrados.

❖ PRODUCTO ESCALAR

TEOREMA 8

Dados los vectores $\vec{u} = (u_1;u_2;u_3)$ y $\vec{v} = (v_1;v_2;v_3)$, el producto escalar entre $\bar{u}$ y $\bar{v}$ se obtiene de la siguiente manera:

$$\vec{u} \times \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Demostración:

Aplicando propiedades del producto escalar, podemos demostrar la fórmula anterior de la siguiente manera:.

$$\vec{u}\times\vec{v}=(u_1\,\bar{i}+u_2\,\bar{j}+u_3\,\bar{k})\times(v_1\,\bar{i}+v_2\,\bar{j}+v_3\,\bar{k})=$$

$$\overset{(1)}{=}u_1\,v_1\,(\bar{i}\times\bar{i})+u_1\,v_2\,(\bar{i}\times\bar{j})+u_1\,v_3\,(\bar{i}\times\bar{k})+u_2\,v_1\,(\bar{j}\times\bar{i})+u_2\,v_2\,(\bar{j}\times\bar{j})+u_2\,v_3\,(\bar{j}\times\bar{k})+$$

$$+u_3\,v_1\,(\bar{k}\times\bar{i})+u_3\,v_2\,(\bar{k}\times\bar{j})+u_3\,v_3\,(\bar{k}\times\bar{k})\overset{(2)}{=}u_1\,v_1+u_2\,v_2+u_3\,v_3$$

(1) aplicando propiedades del producto escalar.
(2) Condición de paralelismo y perpendicularidad de vectores

$\bar{i}\perp\bar{j}\Rightarrow\bar{i}\times\bar{j}=\bar{j}\times\bar{i}=0$ $\qquad$ $\bar{i}\,//\,\bar{i}\Rightarrow\bar{i}\times\bar{i}=1$

$\bar{j}\perp\bar{k}\Rightarrow\bar{j}\times\bar{k}=\bar{k}\times\bar{j}=0$ $\qquad$ $\bar{j}\,//\,\bar{j}\Rightarrow\bar{j}\times\bar{j}=1$

$\bar{k}\perp\bar{i}\Rightarrow\bar{k}\times\bar{i}=\bar{i}\times\bar{k}=0$ $\qquad$ $\bar{k}\,//\,\bar{k}\Rightarrow\bar{k}\times\bar{k}=1$

PRÁCTICA

15) Dados los vectores $\vec{a}=(2\,;-1;0)$ y $\vec{b}=(0\,;3\,;4)$, determina:
   a) $\vec{a}\times\vec{b}$
   b) el ángulo que forman dichos vectores

16) ¿Cuáles de los siguientes pares de vectores son perpendiculares?
   a) $(1;-1;1)$ y $(2\,;1;5)$
   b) $(\pi\,;2\,;1)$ y $(2\,;-\pi\,;0)$
   c) $(-5\,;1;0)$ y $(2\,;10\,;0)$

17) Dados los vectores $\vec{a}=\bar{i}+m\bar{j}+\bar{k}$ y $\vec{b}=-2\bar{i}+4\bar{j}+m\bar{k}$, halla m para que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean:
   a) Paralelos
   b) Ortogonales

18) Demuestra que si $\bar{v}=(v_1;v_2;v_3)\neq\vec{o}$ es un vector del espacio, entonces $v_1=\bar{v}\times\bar{i}$; $v_2=\bar{v}\times\bar{j}$ y $v_3=\bar{v}\times\bar{k}$

19) Si en $\{o;\bar{i};\bar{j};\bar{k}\}$ es $a(2;3;1)$, determina:
   a) vector $\text{proy}_{\bar{i}}\overrightarrow{oa}$ $\qquad$ b) vector $\text{proy}_{\bar{j}}\overrightarrow{oa}$ $\qquad$ c) vector $\text{proy}_{\bar{k}}\overrightarrow{oa}$

TEOREMA 9

Si $\vec{u}=(u_1;u_2;u_3)\neq\vec{o}$, entonces $\cos\widehat{\bar{u}\,\bar{i}}=\dfrac{u_1}{|\vec{u}|}$; $\cos\widehat{\bar{u}\,\bar{j}}=\dfrac{u_2}{|\vec{u}|}$ y $\cos\widehat{\bar{u}\,\bar{k}}=\dfrac{u_3}{|\vec{u}|}$

Demostración:

Calculando $\vec{u}\times\vec{i}$, resulta:

Por definición: $\vec{u}\times\vec{i}=|\vec{u}|\cdot|\vec{i}|\cdot\cos\widehat{\bar{u}\,\bar{i}}\underset{|\vec{i}|=1}{=}|\vec{u}|\cdot\cos\widehat{\bar{u}\,\bar{i}}$

Por componentes: $\vec{u}\times\vec{i}=(u_1;u_2;u_3)\times(1;0;0)=u_1\cdot 1+u_2\cdot 0+;u_3\cdot 0=u_1$

De donde:

$$|\vec{u}|\cdot\cos\widehat{\bar{u}\,\bar{i}}=u_1\Rightarrow\cos\widehat{\bar{u}\,\bar{i}}=\frac{u_1}{|\vec{u}|}$$

De manera análoga se demuestra las otras dos igualdades del teorema.

TEOREMA 10

Si $\vec{u}=(u_1;u_2;u_3)\neq\vec{o}$, entonces $\cos^2\widehat{\bar{u}\,\bar{i}}+\cos^2\widehat{\bar{u}\,\bar{j}}+\cos^2\widehat{\bar{u}\,\bar{k}}=1$

Demostración:

Teniendo en cuenta el teorema anterior, resulta:

$$\cos^2\widehat{\bar{u}\,\bar{i}}+\cos^2\widehat{\bar{u}\,\bar{j}}+\cos^2\widehat{\bar{u}\,\bar{k}}=\left(\frac{u_1}{|\vec{u}|}\right)^2+\left(\frac{u_2}{|\vec{u}|}\right)^2+\left(\frac{u_3}{|\vec{u}|}\right)^2=\frac{u_1^2+u_2^2+u_3^2}{|\vec{u}|^2}\underset{|\vec{u}|=\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}}{=}\frac{|\vec{u}|^2}{|\vec{u}|^2}=1$$

PRÁCTICA

20) Prueba que:

"Si $\vec{u}=(u_1;u_2;u_3)\neq\vec{o}$, entonces $\bar{u}_0=\left(\cos\widehat{\bar{u}\,\bar{i}};\cos\widehat{\bar{u}\,\bar{j}};\cos\widehat{\bar{u}\,\bar{k}}\right)$"

Recuerda que: $\vec{u}_0=\dfrac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$ es su versor asociado a $\vec{u}$

21) Determina los cosenos directores del vector $(1;-1;2)$.

22) Sabiendo que los cosenos directores de un vector son $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$; $\cos\beta=\dfrac{1}{3}$; $\cos\gamma=\dfrac{\sqrt{23}}{6}$ y módulos 5, calcula las componentes del vector.

23) Determina el vector de módulo 5 que forma ángulos iguales con los versores $\bar{i}$; $\bar{j}$ y $\bar{k}$.

❖ PRODUCTO VECTORIAL

TEOREMA 11

Dados los vectores $\vec{u} = (u_1 ; u_2 ; u_3)$ y $\vec{v} = (v_1 ; v_2 ; v_3)$, el producto vectorial entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se obtiene de la siguiente manera:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_2\, v_3 - u_3\, v_2)\, \bar{i} - (u_1\, v_3 - u_3\, v_1)\, \bar{j} + (u_1\, v_2 - u_2\, v_1)\, \bar{k}$$

Demostración:

Aplicando propiedades del producto vectorial, podemos demostrar la fórmula anterior de la siguiente manera:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_1\, \bar{i} + u_2\, \bar{j} + u_3\, \bar{k}) \wedge (v_1\, \bar{i} + v_2\, \bar{j} + v_3\, \bar{k}) =$$

$$\overset{(1)}{=} u_1\, v_1\, (\bar{i} \wedge \bar{i}) + u_1\, v_2\, (\bar{i} \wedge \bar{j}) + u_1\, v_3\, (\bar{i} \wedge \bar{k}) + u_2\, v_1\, (\bar{j} \wedge \bar{i}) + u_2\, v_2\, (\bar{j} \wedge \bar{j}) + u_2\, v_3\, (\bar{j} \wedge \bar{k}) +$$

$$+ u_3\, v_1\, (\bar{k} \wedge \bar{i}) + u_3\, v_2\, (\bar{k} \wedge \bar{j}) + u_3\, v_3\, (\bar{k} \wedge \bar{k}) \overset{(2)}{=}$$

$$= u_1\, v_2\, \bar{k} + u_1\, v_3\, (-\bar{j}) + u_2\, v_1\, (-\bar{k}) + u_2\, v_3\, \bar{i} + u_3\, v_1\, \bar{j} + u_3\, v_2\, (-\bar{i}) =$$

$$= (u_2\, v_3 - u_3\, v_2)\, \bar{i} - (u_1\, v_3 - u_3\, v_1)\, \bar{j} + (u_1\, v_2 - u_2\, v_1)\, \bar{k}$$

(1) aplicando propiedades del producto vectorial.
(2) Definición de producto vectorial

$\bar{i} \,//\, \bar{i} \Rightarrow \bar{i} \wedge \bar{i} = \bar{0}$ $\qquad$ $\bar{i} \wedge \bar{j} = \bar{k}$ y $\bar{j} \wedge \bar{i} = \bar{k}$

$\bar{j} \,//\, \bar{j} \Rightarrow \bar{j} \wedge \bar{j} = \bar{0}$ $\qquad$ $\bar{i} \wedge \bar{k} = -\bar{j}$ y $\bar{k} \wedge \bar{i} = \bar{j}$

$\bar{k} \,//\, \bar{k} \Rightarrow \bar{k} \wedge \bar{k} = \bar{0}$ $\qquad$ $\bar{j} \wedge \bar{k} = \bar{i}$ y $\bar{k} \wedge \bar{j} = -\bar{i}$

A modo de ejemplo demostraremos que $\bar{i} \wedge \bar{j} = \bar{k}$. Para esto deberemos probar que $\bar{i} \wedge \bar{j}$ y $\bar{k}$ tiene igual dirección, sentido y módulo.

Módulo:

$$\left.\begin{array}{l} |\bar{i} \wedge \bar{j}| = \underbrace{|\bar{i}|}_{1} \cdot \underbrace{|\bar{j}|}_{1} \cdot \text{sen}\, \underbrace{\hat{\bar{i}\bar{j}}}_{\pi/2} = 1 \\ \\ |\bar{k}| = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow |\bar{i} \wedge \bar{j}| = |\bar{k}| = 1$$

Dirección:

$$\left.\begin{array}{l} \text{dirección } \bar{i} \wedge \bar{j} \text{ perpendicular al plano xy} \\ \bar{k} \text{ perpendicular al plano xy} \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{k} \,//\, \bar{i} \wedge \bar{j} \Rightarrow \text{dir } \bar{i} \wedge \bar{j} = \text{dir } \bar{k}$$

Sentido:

Aplicando la regla de la mano derecha podemos concluir que:

$$\text{sentido } \bar{i} \wedge \bar{j} = \text{sentido } \bar{k}$$

De lo anterior podemos concluir que $\bar{i} \wedge \bar{j} = \bar{k}$ ya que tienen igual módulo, dirección y sentido.

Como regla nemotécnica para recordar la última fórmula podemos emplear el siguiente esquema:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \bar{i}\underbrace{\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}}_{(1)} - \bar{j}\underbrace{\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}}_{(1)} + \bar{k}\underbrace{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}}_{(1)} =$$

$$= \bar{i}\,(u_2 v_3 - u_3 v_2) - \bar{j}\,(u_1 v_3 - u_3 v_1) + \bar{k}\,(u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

Cada una de las expresiones indicadas en (1) se denominan determinantes de orden dos y su cálculo se realiza de la siguiente manera:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

PRÁCTICA

24) Dados $q(-2;3;-1)$ y $p(1;-2;1)$ en $\{o;\bar{i};\bar{j};\bar{k}\}$, determina:

a) La expresión canónica de $\vec{qp}$

b) $\left|\vec{qp} + \vec{pq}\right|$

c) $\alpha / \vec{v} = (\alpha;2;-3)$ y $\vec{v}$ es perpendicular a $\vec{pq}$

d) $proy_{\vec{oa}}\ \vec{pq}$ siendo $a(-1;0;3)$

25) Dados los vectores $\vec{a} = (2;-1;3)$ y $\vec{b} = (2;-1;0)$ determina:

a) Las componentes de $\vec{a} \wedge \vec{b}$

b) $\left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right|$

c) $(2\vec{a} + 3\vec{b}) \wedge (\vec{a} - 2\vec{b})$

d) $(\vec{a} \wedge \bar{j}) \times (\vec{b} \wedge \bar{k})$

26) Dados los vectores $\vec{u} = -3\bar{i} + 6\bar{j}$, $\vec{v} = (3;-4)$ y $\vec{w} = \left(m;\frac{1}{3}\right)$ determina:

a) Las componentes del vector $\vec{a} = |\vec{v}| \cdot (2\vec{u} - \vec{v})$

b) El valor de m para que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{w}$ resulten:
   (1) paralelos
   (2) perpendiculares

27) Dados los vectores $\vec{u} = 2\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}$ y $\vec{v} = -\bar{i} + 2\bar{k}$, determina:

a) Las componentes de un vector perpendicular a ambos.

b) El área del paralelogramo que ellos determinan.

28) Halla las componentes del versor perpendicular a los vectores $\vec{a} = (0;1;5)$ y $\vec{b} = (-3;0;2)$ simultáneamente. ¿existe única solución?

29) Si $|\overline{w}| = \sqrt{2}$; $|\overline{v}| = \frac{1}{4}$ y $\widehat{\overline{w}\,\overline{v}} = 30º$, determina:

a) $\overline{w} \times \overline{w}$

b) $\overline{w} \times \overline{v}$

c) $(\overline{w} + \overline{v}) \times (\overline{v} + \overline{w})$

d) $(\overline{w} + \overline{v}) \times (\overline{w} - \overline{v})$

e) $\left(\frac{1}{2}\overline{v} - \overline{w}\right) \times \left(\overline{v} - \frac{1}{2}\overline{w}\right)$

f) $|\overline{v} \wedge \overline{w}|$

g) $|2\vec{v} \wedge \overline{w}|$

h) $|(2\overline{w} - \overline{v}) \wedge (3\overline{w} + 4\overline{v})|$

30) Halla el o los vectores de módulo 3 perpendicular a los vectores $\overline{c} = (3;-1;0)$ y $\overline{d} = (1;4;-2)$ simultáneamente.

31) Dados los vectores $\overline{a} = (2;-1;3)$ y $\overline{b} = (0;-2;4)$, determinar:

a) $\text{proy}_{\overline{a}}\overline{b}$

b) $\text{proy}_{\overline{b}}\overline{a}$

32) Determina las componentes de $\overline{v} = (v_1;v_2;v_3)$ sabiendo que $\overline{v}$ es paralelo al vector $\vec{ab}$, siendo $a(3;-1;2)$ y $b(-1;3;5)$, $|\overline{v}| = \sqrt{164}$ y $\widehat{\overline{v}\,\overline{i}}$ es obtuso.

33) Determina:

a) $\left(\vec{k} \wedge \vec{j}\right) \times \vec{i}$

b) $\left(\vec{i} \wedge \vec{j}\right) \times \vec{k}$

c) si los vectores $\overline{u} = (2;3;-1)$; $\overline{v} = (1;-1;3)$ y $\overline{w} = (1;9;-11)$ son coplanares.

d) el valor de x para que los vectores $\overline{u} = (3;-5;1)$; $\overline{v} = (7;4;2)$ y $\overline{w} = (1;14;x)$ sean coplanares.

34) Determina un vector de la misma dirección que $\overline{v} = (1;-2;3)$ y tal que forme con $\overline{w} = (-2;4;-1)$ un paralelogramo de área igual a 25.

35) Determina:

a) El o los valores de "n" sabiendo que dist(p_1,p_2) = 5 siendo p_1(n; n; 1), p_2(0; 3; 5)

b) t para que el volumen del paralelepípedo que tiene por aristas $\vec{u} = (-1;1;1)$; $\vec{v} = (1;0;t)$ y $\vec{w} = (2;-1;1)$ sea 7

c) los vectores $\overline{v}$ y $\overline{t}$ tales que: $\overline{t}$ sea perpendicular a $\overline{u} = (2;4;0)$, $\overline{v}$ sea paralelo a $\overline{u}$, $\overline{w} = \overline{v} + \overline{t}$ y $\overline{w} = 3\breve{i} + \breve{j} - \breve{k}$.