

Instituto Politécnico

Universidad Nacional de Rosario Universidad Nacional de

Sistemas de Ecuaciones

4º Año

Matemática

Cód. 1402-19

Betina Cattáneo
Mónica Napolitano



Dpto. de Matemática

Masterización: RECURSOS PEDAGÓGICOS

A continuación trataremos de encontrar una estrategia que nos permita resolver un sistema $m \times n$. Es decir, hallar el conjunto de todas sus soluciones.

Resolución de un sistema $m \times n$:

Primeramente precisaremos algunos conceptos:

- Sistemas escalonados: son aquellos en los cuales cada ecuación, a partir de la segunda, empieza, por lo menos, con un coeficiente nulo más que la anterior.

$$\text{Ejemplo: } S \begin{cases} x - 3y + 2z = 10 \\ 5y - 10z = -21 \\ 2z = 4 \end{cases}$$

- Sistemas equivalentes: son aquellos que tienen el mismo conjunto solución.

¿Cómo sabemos que sustituimos un sistema por otro equivalente?

Lo podremos asegurar en tanto apliquemos operaciones elementales a las ecuaciones que conforman el sistema.

A saber:

- Intercambiar ecuaciones
- Multiplicar las ecuaciones del sistema por un número real no nulo.
- Sumar ecuaciones
 - Las últimas dos se pueden resumir: cambiar una ecuación por una combinación lineal de otras.

A partir de esto podemos generalizar ciertos procesos ya que a veces algunas modelizaciones de problemas (generalmente no matemáticos) necesitan de resoluciones de sistemas con muchas ecuaciones e incógnitas. Es muy importante entonces, disponer de un método de resolución automático de tales sistemas de cuya realización se puede encargar, por ejemplo, un ordenador. Un procedimiento que conduzca con seguridad, paso a paso, de los datos de un problema a su solución se llama **Algoritmo**. Lo que mostraremos a continuación es un algoritmo muy simple para resolver casi cualquier sistema de ecuaciones lineales.



Utilizaremos el **ALGORITMO DE GAUSS** para escalar y resolver el siguiente sistema:

$$(S) \begin{cases} x + 2y - z = -5 & (E_1) \\ 2x - y + 2z = 8 & (E_2) \\ 3x + 3y + 4z = 5 & (E_3) \end{cases}$$

Nota: Previamente debemos definir cómo se calcula un "determinante 2x2":

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

Determinante 2×2

Lo que debemos hacer es armar una tabla usando los coeficientes y términos independientes del sistema

x	y	z	$t.i.$	
1	2	-1	-5	E_1
2	-1	2	8	E_2
3	3	4	5	E_3
	-5	4	18	E'_2
	-3	7	20	E'_3
		-23	-46	E''_3

El número -5 de la fila de E_2' se obtuvo del determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) - 2 \times 2 = -5$.

El número 18 de la misma fila se obtuvo del determinante: $\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 1 \times 8 - (-5) \times 2 = 18$.

Y así vamos obteniendo los distintos números, para completar dicha fila hacemos: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 - (-1) \times 2 = 4$

Para obtener los números de la fila E_3' se va a obtener resolviendo determinantes armados con los números de la fila E_1 y E_3 . Siempre se usa la primer columna (la de x) y la otra columna corresponderá a la columna en la que esté ubicado el número.

Luego procedemos de igual manera con E_2' y E_3' quedándonos E_3'' .

Para armar el sistema escalonado usamos E_1 ; E_2' y E_3'' . Es decir, queda:

$$S'' \begin{cases} x + 2y - z = -5 & (E_1) \\ -5y + 4z = 18 & (E_2') \\ -23z = -46 & (E_3'') \end{cases} \text{ entonces } S = \{(1; -2; 2)\}$$



Siempre debes tener en cuenta que el número que se ubica en la primer fila y primer columna del cuadro debe ser distinto de cero. En caso de que esto no suceda, intercambia ecuaciones!

Sistemas de Ecuaciones

Matemática

Ejemplos:

I.
$$S \begin{cases} 7y - 17z = -21 \\ x - 3y + 7z = 10 \\ 5x - y + z = 8 \end{cases}$$
 lo primero que debemos realizar es un intercambio entre la

primera y segunda ecuación (ya que en la primera el coeficiente de x es cero). Así

las cosas el sistema nos queda:
$$S \begin{cases} x - 3y + 7z = 10 \\ 7y - 17z = -21 \\ 5x - y + z = 8 \end{cases}$$
. Ahora escalonamos con Gauss:

x	y	z	$t.i.$	
1	-3	7	10	E_1
0	7	-17	-21	E_2
5	-1	1	8	E_3
	7	-17	-21	E'_2
	14	-34	-42	E'_3
	0	0		E''_3

$$S \begin{cases} x - 3y + 7z = 10 \\ 7y - 17z = -21 \\ 0z = 0 \end{cases}$$

Analizando la última ecuación notamos que hay infinitas soluciones. Cualquier valor real z la cumple. Entonces hacemos $z = \lambda$; $\lambda \in \mathbb{R}$, con lo que

$$y = -3 + \frac{17}{7}\lambda, \text{ y luego } x = 1 + \frac{2}{7}\lambda.$$

Tendremos entonces, por un lado, un sistema compatible INDETERMINADO, y por

otro su conjunto solución es:
$$S = \left\{ \left(1 + \frac{2}{7}\lambda, -3 + \frac{17}{7}\lambda, \lambda \right), \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

II.
$$S \begin{cases} x - 3y - 2z = 7 \\ 2x - y + 15z = 3 \\ x - 8y - 21z = 11 \end{cases}$$

x	y	z	$t.i.$	
1	-3	-2	7	
2	-1	15	3	
1	-8	-21	11	
	5	19	-11	
	5	-19	4	
	0		-35	

$$S \begin{cases} x - 3y - 2z = 7 \\ 5y + 19z = -19 \\ 0z = -35 \end{cases}$$

Analizando la última ecuación notamos que NO HAY SOLUCIÓN. Entonces estamos ante un sistema INCOMPATIBLE. Y su conjunto solución es $S = \emptyset$

Práctica

1. Sin efectuar cálculos, indica una solución del siguiente sistema



$$\begin{cases} 2x + y + 3z - t = 0 \\ x + y - z = 0 \\ x + y + 2z + 3t = 0 \end{cases}$$

2. Resuelve los sistemas de ecuaciones:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} x + y + z = 2 \\ -2x + y + 2z = 2 \\ 3x - 2y - z = 4 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ x + 2y - 2z = -1 \\ 2x - 3y + z = -1 \end{cases}$$

$$\text{g) } \begin{cases} 2a - 5b + 4c = -1 \\ 4a - 5b + 4c = 3 \\ 5a - 3c = 13 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 6y - 5z = -4 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\text{h) } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y - z = 3 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 4x - 6y + 5z = 0 \\ 6x - 9y + 10z = 0 \end{cases}$$

$$\text{i) } \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \\ -2x - y + 5z = 6 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 3y = 5 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

$$\text{j) } \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - y + 5z = 0 \\ x + y + 4z = 0 \end{cases}$$

3. Dado el sistema $\begin{cases} ax - y = 1 \\ x - ay = 2a - 1 \end{cases}$, determina el valor de "a" para que:

- i. sea incompatible
- ii. sea compatible indeterminado
- iii. tenga una solución en la que $x = 3$

4. Demuestra que el sistema
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = b_1 \\ 2x + 5y + 3z = b_2 \\ x + 8z = b_3 \end{cases}$$
 es compatible determinado cualquiera

sean b_1 ; b_2 y b_3 .

- Halla tres números sabiendo que, el primero es igual a dos veces el segundo mas la mitad del tercero; que la suma del segundo y el tercero es igual al primero más 1, y que si se resta el segundo de la suma del primero con el tercero el resultado es 5.
- En cierto comercio, un cliente compra 5 kg de papas, 3 kg de azúcar y 2 kg de café, gastando un total de \$37,50. Otro cliente compra 2 kg de papas, 2 kg de azúcar y 1 kg de café, gastando \$19. Un tercer cliente compra 4 kg de azúcar y 5 kg de café gastando \$52. halla el precio de cada artículo.
- Tres amigos se pesan en una báscula de 2 a 2. Antonio y Benito suman 110 kg, Antonio y Carlos 120 kg, mientras que Benito y Carlos pesan 130 kg. ¿Cuántos pesa cada uno?
- Los 90 alumnos de 3º año de un colegio están divididos en 3 grupos: A, B y C. Calcula el número de alumnos de cada grupo sabiendo que si se pasan 7 alumnos del grupo B al grupo A, ambos grupos tendrían el mismo número de alumnos o que si se pasan 4 alumnos del grupo C al grupo A, en el grupo A habría la mitad de alumnos que en el grupo C.
- La suma de las tres cifras de un número es 7. La cifra de las centenas, es igual a la suma de las decenas más el doble de las unidades. Si se permutan entre si las cifras de las centenas y la de las unidades, el número disminuye en 297 unidades. Calcula dicho número.
- Determine los valores de los coeficientes a , b y c tales que los puntos $(1;-1)$, $(-1;-5)$ y $(3;11)$ pertenezcan a la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$
- Una compañía de bicicletas produce tres modelos de bicicletas: Dakar, Komodo y Córdoba. La fabricación de cada bicicleta consta de tres etapas: soldadura, pintura y ensamblaje. El tiempo que se dedica a cada etapa de fabricación se indica en la siguiente tabla. Durante una semana específica, la compañía dispone de un máximo de 133 horas para soldadura, 78 horas para pintura y 96 horas para ensamblaje. Determine cuántas bicicletas de cada tipo deben producirse esa semana para que la compañía opere a su máxima capacidad.

Etapa	Dakar	Komodo	Córdoba
Soldadura	2	3	4
Pintura	1	2	2,5
Ensamblaje	1,5	2	3



Respuestas

1. $(0; 0; 0; 0)$

2.

a) $\{(1; -2; 3)\}$

f) $\{(1; -2; 3)\}$

b) $\left\{\left(\frac{1}{7}; \frac{13}{14}; \frac{3}{2}\right)\right\}$

g) $\left\{\left(-2; \frac{1}{5}; -1\right)\right\}$

c) $\left\{\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 2\right)\right\}$

h) $\{(-2 - 2\lambda; 3 + \lambda; \lambda); \lambda \in \mathbb{R}\}$

d) $\left\{\left(\frac{3}{2}\alpha; \alpha; 0\right); \alpha \in \mathbb{R}\right\}$

i) $\{ \}$

e) $\{ \}$

j) $\{(-3\alpha; -\alpha; \alpha); \alpha \in \mathbb{R}\}$

3.

i. $a = -1$

ii. $a = 1$

iii. $a = -\frac{4}{3} \vee a = 1$

4. A cargo del alumno

5. $\frac{5}{2}; \frac{1}{2}$ y 3

6. 1 kg de papas \rightarrow \$2,5

1 kg de azúcar \rightarrow \$3

1 kg de café \rightarrow \$8

7. Antonio \rightarrow 50 kg

Benito \rightarrow 60 kg

Carlos \rightarrow 70 kg

8. A \rightarrow 16 alumnos

B \rightarrow 30 alumnos

C \rightarrow 44 alumnos

9. 421

10. $a = 1$, $b = 2$ y $c = -4$

11. Se podrán producir 28 Dakar, 15 Komodo y 8 Córdoba.